日本獣医生命科学大学

令和7(2025)年度　入学者選抜

一般選抜（第３回）

数　　　　　　学

「解答例」

【Ⅰ】　**問１．** ア - ③　イ - ④　ウ - ③　エ - ③

問２． オ・カ・キ - ①・⓪・③　ク・ケ・コ - ①・④・④

問３． サ - ③　シ・ス - ②・③

【Ⅱ】　**問１．** ア・イ - ⑥・④　ウ - ⑧　エ - ④　オ - ②

問２． カ - ①　キ - ⑧

問３． ク - ⑥　ケ - ⑨　コ - ②　サ - ⑤　シ - ④

【Ⅲ】　**問１．**

$a_1 = c = \frac{9}{2}$ のとき

$a_1 > 2$ のため、$a_2 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$

$0 \leqq a_2 \leqq 2$ のため、$a_3 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{9}{4}$

$a_3 > 2$ のため、$a_4 = \frac{9}{4} - 4 = -\frac{7}{4}$

よって、$a_2 = \frac{1}{2}$、$a_3 = \frac{9}{4}$、$a_4 = -\frac{7}{4}$

問２．

$c < 0$ のとき、任意の正の整数 n について $a_n < 0$　$(*)$であることを数学的帰納法によって示す。

（i）　$n = 1$のとき、$a_1 = c < 0$ となり $(*)$は成立する。

【Ⅲ】　(ii)　$n=k$（$k=1,2,\ldots$）のとき、(*) が成り立つと仮定すると、

$a_k<0$、$a_{k+1}=a_k-4<0$ であるから

$n=k+1$ のときも(*)は成立する。

(i)(ii)よりすべての自然数nに対して(*)が成立することが示された。

したがって全ての自然数 n に対して$a_{n+1}=a_n-4$ となり、

数列$\{a_n\}$は等差数列であるから、

$$a_n=a_1+-4(n-1)=-4n+c+4$$

問３.

数学的帰納法によって、$1\leqq a_n\leqq 2$（**）を証明する。

(i)　$n=1$のとき、$1\leqq a_1\leqq 2$ となり、(**) は成立する。

(ii)　$n=k$（$k=1,2,\ldots$）のとき、(**) が成り立つと仮定すると、

$a_{k+1}=-\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}$である

$1\leqq a_k\leqq 2$より、$-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{5}{2}\geqq -\frac{1}{2}a_k+\frac{5}{2}\geqq -\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{5}{2}$であり、

$\frac{3}{2}\leqq a_{k+1}\leqq 2$となるので、$n=k+1$のときも(*)は成立する。

以上(i)(ii)より、すべての自然数nに対して$-\frac{1}{2}a_{n+1}=\ a_n+\frac{5}{2}$

すなわち、$a_{n+1}-\frac{5}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{5}{3}\right)$が成り立つので、

$$a_n-\frac{5}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(c-\frac{5}{3}\right)\quad \text{である。}$$

よって、$a_n=\frac{5}{3}+\left(c-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

【Ⅳ】

問１.

$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$、$y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$と変形できるので、三角関数の加法定理より、

$$\begin{cases}\cos x=cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)=cos\frac{x+y}{2}\cdot cos\frac{x-y}{2}-sin\frac{x+y}{2}\cdot sin\frac{x-y}{2}\\ \cos y=cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)=cos\frac{x+y}{2}\cdot cos\frac{x-y}{2}+sin\frac{x+y}{2}\cdot sin\frac{x-y}{2}\end{cases}$$

差を取って、

$\cos x-\cos y=-2\cdot sin\frac{x+y}{2}\cdot sin\frac{x-y}{2}$

【Ⅳ】　問２．

$f(s)-f(t)=a(\cos s-\cos t)+(\cos 2s-\cos 2t)$

$\qquad\qquad=-2a\cdot sin\frac{s+t}{2}\cdot sin\frac{s-t}{2}-2\cdot\sin(s+t)\cdot sin(s-t)$

$s+t=2\cdot\frac{s+t}{2}$、$s-t=2\cdot\frac{s-t}{2}$と変形すると、２倍角の公式より、

$$f(s)-f(t)=-2a\cdot sin\frac{s+t}{2}\cdot sin\frac{s-t}{2}-2\cdot\sin\left(2\cdot\frac{s+t}{2}\right)\cdot sin\left(2\cdot\frac{s-t}{2}\right)$$

$$=-2a\cdot sin\frac{s+t}{2}\cdot sin\frac{s-t}{2}-8\cdot\sin\frac{s+t}{2}\cdot\cos\frac{s+t}{2}\cdot sin\frac{s-t}{2}\cdot\cos\frac{s-t}{2}$$

$$=-2\cdot sin\frac{s+t}{2}\cdot sin\frac{s-t}{2}\left(a+4\cos\frac{s+t}{2}\cdot\cos\frac{s-t}{2}\right)\quad\cdot\cdot\cdot\ ①$$

一般に、$-1\leqq\cos\frac{s+t}{2}\cdot cos\frac{s-t}{2}\leqq 1$であるから、$a>4$のとき、

$a+4\cos\frac{s+t}{2}\cdot cos\frac{s-t}{2}\geqq a-4>0$

したがって、$f(s)\neq f(t)$であるとき、①より、

$$\{f(s)-f(t)\}sin\frac{s+t}{2}\cdot sin\frac{s-t}{2}=-2\left(\sin\frac{s+t}{2}\right)^2\left(\sin\frac{s-t}{2}\right)^2\left(a+4\cos\frac{s+t}{2}\cdot\cos\frac{s-t}{2}\right)<0$$

問３．

$s-t=\frac{2}{3}\pi$のとき、①より、$f(s)-f(t)=-\sqrt{3}\cdot sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\left\{a+2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

したがって、$f(s)=f(t)$のとき、

$$\begin{cases} sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=0 & \cdot\cdot\cdot ② \text{ または、} \\ cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{a}{2} & \cdot\cdot\cdot ③ \end{cases}$$

$0\leqq t<2\pi$、②より、$t+\frac{\pi}{3}=\pi$、2π、すなわち、$t=\frac{2}{3}\pi$、$\frac{5}{3}\pi$

③を満たすｔについて考えると、

（ｉ）　$a>2$ のとき、ｔは存在しない

（ｉｉ）　$a=2$ のとき、$t+\frac{\pi}{3}=\pi$　$\therefore t=\frac{2}{3}\pi$　これは②の解に含まれる。

（ｉｉｉ）　$0<a<2$ のとき、

$$t+\frac{\pi}{3}=\alpha\text{、}\beta\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi\text{、}\alpha+\beta=2\pi\right)$$

これは②の解と重複しない。

以上より、すべてのｔの値の和をＳとすると、

$$\begin{cases} a\geqq 2 \text{ のとき、} S=\frac{2}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi=\frac{7}{3}\pi \\ 0<a<2 \text{ のとき、} S=\frac{2}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi+\alpha-\frac{\pi}{3}+\beta-\frac{\pi}{3}=\frac{11}{3}\pi \end{cases}$$

よって、$a\geqq 2$ のとき $\frac{7}{3}\pi$、$0<a<2$ のとき $\frac{11}{3}\pi$